UAM
Uniwersytet im A.Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Poznańskiego 4,
61-614 Poznań

Prof.dr hab Leszek Skrzypczak
tel.: +48-61-829-54-73
fax: +48-61-829-53-15
e-mail: lskrzyp@amu.edu.pl

Poznań 18.12.2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Artura Słabuszewskiego

Zanurzenia ułamkowych przestrzeni Sobolewa na przestrzeniach metrycznych z miarą

Rozprawa doktorska mgra Artura Słabuszewskiego dotyczy przestrzeni funkcyjnych typu Sobolewa-Biesowa określonych na przestrzeniach metrycznych z miarą i zanurzeń takich przestrzeni. Praca jest obszerna, liczy 143 strony i składa się z trzech rozdziałów. Dołączona do rozprawy bibliografia jest również obszerna i liczy 108 pozycji.

Analiza na przestrzeniach metrycznych i związane z nią przestrzenie funkcyjne stanowią przedmiot badań od kilku dekad. Za początek badań przestrzeni funkcyjnych na przestrzeniach metrycznych z miarą można uznać wspólne prace R.Coifmanna i G.Weissa dotyczące przestrzeni Hardy'ego, które ukazały się w latach 70-tych ubiegłego wieku.

Niech (X, d, μ) będzie przestrzenią metryczną z określonymi na niej metryką d i miarą μ. Rozprawa doktorska poświęcona jest kilku typom przestrzeni funkcyjnych określonych na X. Wszystkie przestrzenie rozpatrywane w rozprawie są uogólnieniami klasycznych przestrzeni Sobolewa, Biesowa i Triebla-Lizorkina, które zostały zdefiniowane pierwotnie na $\mathbb{R}^n$. Sposób takiego uogólniani, czy też raczej przeniesienia definicji na przestrzeń metryczną z miarą, nie jest jednoznacznie określony. Trzeba zastąpić czymś pojęcie, które na przestrzeni metrycznej nie są dostępne - pochodną, czy też wymiar przestrzeni euklidesowej. W konsekwencji w literaturze spotkamy kilka propozycji. Większość przestrzenie rozpatrywanych w rozprawie jest oparta na pojęciu α-gradientu Hajłasza, zdefiniowanego przez Piotra Hajłasza w 1996 dla $\alpha = 1$ oraz przez Dachuna Yanga dla dowolnego $\alpha > 0$ w 2003 roku. Funkcja mierzalna $g \geqslant 0$ jest α-gradientem funkcji f jeśli istnieje zbiór miary zero $A_f \subset X$ taki, ze

$$\forall x, y \in X \setminus A_f \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)^{\alpha}(g(x) - g(y)).$$

Przestrzeniami zdefiniowanymi w ten sposób są przestrzenie Hajłasza-Sobolewa jednorodne i niejednorodne $\dot{M}^{\alpha,p}(X,d,\mu)$ i $M^{\alpha,p}(X,d,\mu)$, jednorodne i niejednorodne Hajłasza-Biesowa $\dot{N}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$, $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ oraz jednorodne i niejednorodne Hajłasza-Triebla-Lizorkina $\dot{M}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ $M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$. (Quasi)-normę w tych przestrzeniach definiujemy wykorzystując α-gradient Hajłasza.

Przestrzeniami rozważanymi w dysertacji, które nie definiuje się przez α-gradient są przestrzenie Słobodeckiego, jednorodne $\dot{W}^{\alpha,p}_s(X,d\mu)$ i niejednorodne $W^{\alpha,p}_s(X,d\mu)$, $\alpha,p,s\in(0,\infty)$. W przypadku tych przestrzeni w definicji (quasi-)norma używamy całki z różnicy wartości funkcji. W przypadku niejednorodnym norma ta wygląda następująco

$$\|f\|_p + \left(\iint_{0<d(x,y)<1} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} d\mu(y)d\mu(x)\right)^{1/p}$$

Pierwszy rozdział omawianej rozprawy ma charakter wstępny na co wskazuje już jego tytuł - Preliminaria. Rozdział ten zaczyna się bardzo elementarnie od podania definicji, przestrzeni metrycznej i topologicznej, kuli w przestrzeni metrycznej, σ-ciała i miary borelowskiej. Dalej omawiane są warunki regularności miar określonych na przestrzeniach metrycznych: regularność Ahlforsa (s-regularność z góry i s-regularność z dołu), borelowska regularność oraz regularność zewnętrzną i wewnętrzną miar borelowskich.

Kolejnym tematem poruszanym w tym rozdziale jest związek pomiędzy własnościami metrycznymi takimi jak całkowita ograniczoność i jednostajna doskonałość a własnościami miary. Przypomina się również warunki zwartości zbiorów w przestrzeniach Lebesgue'a $L^p(X,\mu)$ i przestrzeniach funkcji mierzalnych p.w. skończonych $L^0(X,\mu)$. Ponad to definiuje się operator mediany wykorzystywany później przy badaniu ciągłości zanurzeń. Na końcu rozdziału definiuje się wyżej wspomniane przestrzenie funkcyjne.

Pomimo wstępnego charaktery rozdział pierwszy zawiera kilka oryginalnych wyników pochodzących z prac autora napisanych wspólnie z R. Alvarado i P. Górką. Do wyników tych zaliczyć należy Twierdzenie 20, które mówi, że w przypadku skończonej miary borelowskiej zachodzenie twierdzenia Łuzina implikuje regularność miary; Stwierdzenie 36 w którym sformułowano warunki równoważne całkowitej ograniczoności podzbioru przestrzeni metrycznej w terminach miary określonej na tej przestrzeni oraz Twierdzenie 48 które jest wersją twierdzenia Hansona o zwartości podzbiorów w $L^0(X,\mu)$ przy założeniach, że przestrzeń metryczna X jest ośrodkowa a miara μ jest skończona. Wreszcie należy zauważyć, we omawiany w tym rozdziale termin "lokalna jednostajna doskonałość" został wprowadzony w pracy współautorskiej mgr Słabuszewskiego z P. Górką. Własność ta słabsza od jednostajnej doskonałości odgrywa ważną rolę w dowodzeniu ciągłości zanurzeń.

Rozdział drugi poświęcony jest ciągłym zanurzeniom przestrzeni Słobodeckiego $W^{\alpha,p}_s(X,d\mu)$. W przypadku klasycznym, gdy przestrzenie określone na obszarach położonych w $\mathbb{R}^n$, lub na rozmaitościach różniczkowych wymiaru n, ważnym parametrem pomagającym opisać zarówno ciągłość jak i zwartość zanurzeń jest parametr $\alpha-\frac{n}{p}$ określany z reguły terminem "dimensional smoothness". Na przykład zanurzenie klasycznej niejednorodnej przestrzeni Sobolewa $W^k_p(\mathbb{R}^n)$ w przestrzenie Lebesgue'a $L^r(\mathbb{R}^n)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy $r<\frac{np}{n-kp}$. W wyżej podanej definicji (quasi)-normy w przestrzeni $W^{\alpha,p}_s(X,d\mu)$ parametrem pełniącym rolę analogiczną do wymiaru wymiaru n w przypadku klasycznym jest parametr s. Choć dla przestrzeni metrycznej nie mamy naturalnie zdefiniowanego wymiaru, jednak możemy wykorzystać regularność miary w sensie Ahlforsa. Okazuje się, że przypadku formułowania warunków dostatecznych właściwym założeniem jest s-regularność miary z dołu, tzn. zachodzenie następującej nierówności

$$\mu(B(x,r)) \geqslant cr^s \qquad 0 < r \leqslant 1$$

gdzie s jest tym samym parametrem, który występuje w definicji przestrzeni $W^{\alpha,p}_s(X,d\mu)$. Zachodzenie odwrotnej nierówności czyli s-regularność z góry jest potrzebna przy dowodzeniu warunków konicznych.

To, że s-regularność z dołu jest warunkiem wystarczającym w przypadku gdy $\alpha p < s$ była znana wcześniej. Przy tych założeniach, przestrzeń zanurza się w przestrzeni $L_q(X,\mu)$ z $q = sp/(s-\alpha p)$. Mgr Słabuszewski dowodzi w rozprawie, że w przypadku $\alpha p > s$ przestrzeń $W^{\alpha,p}_s(X,d\mu)$ można zanurzyć w przestrzeń funkcji hölderowskich $C^{0,\alpha-s/p}$ (Twierdzenie 76 i Twierdzenie 77). Rozpatruje też przypadek graniczny $\alpha p = s$ i wykazuje nierówności, które są nierównościami odpowiednikami nierówności Trudingera (Twierdzenue 76 i Twierdzenie 80). Całość zagadnienia, zarówno wyszczególnienie tych trzech przypadków jak i podane rozwiązania w każdym z przypadków mają swoje odpowiedniki w teorii klasycznych przestrzeni funkcyjnych określonych na $\mathbb{R}^n$.

W dysertacji badana jest również konieczność założenia regularności miary z dołu. Warunki konieczne dowodzi się jednak przy dodatkowych założeniach. W przypadku $\alpha p < s$ zakłada się, że miara jest s-regularna z góry, a w dwóch pozostałych przypadkach przyjmuje się dodatkowo, że przestrzeń metryczna jest lokalnie jednostajnie doskonała. Wykazano również, że dla miar s-regularnych z góry w przypadku $\alpha p < s$ wykładnik $q = sp/(s-\alpha p)$ jest optymalny w tym sensie, że przestrzeni nie można zanurzyć w żadnej przestrzeni Lebesgue'a o wykładniku większym of q. Podobną własność mają zanurzenia w przestrzenie funkcji hölderowskich jeśli założymy dodatkowo lokalną jednostajną doskonałość. Teraz nie istnieją zanurzenia w przestrzeń z gładkością $\beta > \alpha - s/p$.

W rozdziale drugim rozpatruje się także zanurzenia przestrzeni Słobodeckiego $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$ w przestrzenie Hajłasza-Sobolewa $M^{\beta,p}(X,d,\mu)$. Udowodniono, że takie zanurzenie jest ciągłe jeśli miara μ jest θ-regularna z dołu, $\alpha p > \theta - s$ oraz $\beta = \alpha + (s-\theta)/p$. Następnie rozważając różne przykłady pokazuje się ,że inkluzja w przeciwną stronę na ogół nie zachodzi, że założenie $\alpha p > \theta - s$ jest istotne oraz, że gładkości $\beta = \alpha + (s-\theta)/p$ na ogół nie da się poprawić.

Rozdział 3 dotyczy zwartości zanurzeń przestrzeni funkcyjnych. Pierwszymi wynikami w tym zakresie były twierdzenia F.Rellicha ($p = 2$) i V.I.Kondraszowa ($p \neq 2$) dotyczące zanurzeń klasycznych przestrzeni Sobolewa $W^k_p(\Omega)$ w przestrzenie Lebesgue'a $L^r(Omega)$ określone na obszarach ograniczonych $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym dla zwartości jest tutaj nierówność $r < \frac{np}{n-kp}$. Zwartość zanurzeń była potem szeroko badana. Zauważono, że taką zwartość można uzyskiwać również przez wyposażenie przestrzenie funkcyjne w odpowiednie wagi, ograniczenie się do funkcji spełniających pewne warunki symetrii np. funkcji radialnych, wreszcie osłabiając warunek ograniczoności obszaru poprzez definiowanie przestrzeni na obszarach quasi-ograniczonych. Mgr Słabuszewski rozpatruje zasadniczo włożenia przestrzeni $M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$, $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ oraz $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$ do przestrzeni Lebesgue'a

$L^r(X,d,\nu)$ i przestrzeni funkcji mierzalnych, przy czym miary związane z przestrzenią zanurzaną i przestrzenią docelową nie muszą być takie same. Można zatem uważać, tego typu twierdzenia za uogólnienie na przestrzenie metryczne klasycznych twierdzeń o zanurzaniu przestrzeni wagowych. Tym co łączy wszystkie wykazane tu twierdzenia jest założenie $r \leqslant p$. W klasycznych twierdzeniach parametr r przestrzeni docelowej może być większy od p. Głównym wynikiem tego rozdziału jest moim zdaniem Twierdzenie 101, które mówi, że zanurzenia

$$M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,d,\nu) \quad \text{i} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^p(X,d,\nu) \tag{1}$$

są zwarte dla dowolnych $0 < \alpha, p, q < \infty$, miary borelowskiej ν jeśli, $\nu \leqslant C\mu$ oraz dodatkowo zachodzą dwa założenia o charakterze technicznym. W szczególności, jeżeli przestrzeń (X,d) jest całkowicie ograniczona to powyższe zanurzenia są zawsze zwarte (Wniosek 106), co odpowiada włożeniom na obszarach ograniczonych. Natomiast przy założeniu, że ν jest absolutnie ciągła względem μ i $d\nu/d\mu \in L^{\theta}$, $1 < \theta < \infty$ to $M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ i $N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$ można zanurzyć w sposób zwarty w przestrzeni Lebesgue'a z wykładnikiem p/θ', gdzie θ' oznacza wykładnik hölderowsko sprzężony (Twierdzenie 96). Teza ostatniego twierdzenia zachodzi również w przypadku gdy przestrzeń docelowa jest przestrzenią funkcji mierzalnych L^0 jeśli założymy, że ν jest miarą absolutnie ciągła i skończoną (Tw. 94). Dalej wykazano, że zwartość zanurzeń (1) dla $\mu = \nu$ jest równoważne zwartości zanurzeń

$$M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\beta}_{p,q}(X,d,\mu) \quad \text{i} \quad N^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \hookrightarrow N^{\beta}_{p,q}(X,d,\mu) \tag{2}$$

dla wszystkich (pewnego) β, $(0 < \beta < \alpha)$ (Twierdzenie 111 i Twierdzenie 112).

Podobne wyniki uzyskano dla przestrzeni Słobodeckiego $W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu)$. W tym przypadku w przeciwieństwie do poprzednich przestrzeni dysponujemy parametrem s, który gra rolę podobną do wymiaru przestrzeni euklidesowej. W konsekwencji mgr Słabuszewski mógł udowodnić twierdzenie mówiące, że zanurzenie

$$W^{\alpha,p}_s(X,d,\mu) \hookrightarrow L^r(X,d,\mu) \tag{3}$$

jest zwarte gdy r spełnia założenie podobne do klasycznego $r < \frac{sp}{s-\alpha p}$ i $\alpha p < s$ (Twierdzenie 118). Dowód zanurzenia (3) przeprowadzono przy dodatkowych założeniach, że μ jest miarą skończoną s-regularna z dołu. Analogicznie gdy $\alpha p > s$ udwodniono zwartość włożenia do przestrzeni hölderowskich $C^{0,\beta}$, jeśli $0 < \beta < \alpha - \frac{s}{p}$ (Twierdzenie 118).

Wszystkie wspomniane wyżej założenia są warunkami dostatecznymi zwartości, a omówione twierdzenia nie zawierają warunków koniecznych. W zakresie badania tych ostatnich mgr Słabuszewskiemu udało się udowodnić następujące stwierdzenia:

- jeżeli miara jest θ-regularna z góry, $\mu(X) < \infty$ i $\alpha p < \theta - s$ to dla wszystkich $0 < r < p$ zanurzenie (3) nie jest zwarte (Tw.123)

- jeżeli istnieje δ_0 takie, że miara jest δ-podwajająca dla , każdego $\delta < \delta_0$ to zwartość któregokolwiek z zanurzeń (1) z $\nu = \mu$ implikuje całkowitą ograniczoność (X,d). (Tw.125)

- jeżeli $\mu(X) < \infty$ i $\operatorname{diam} X = \infty$ i miara spełnia warunek podwajania w nieskończoności to zanurzenia (1) z $\nu = \mu$ nie są zwarte. (Tw.127)

Zatem, wymienione ostatnio wyniki nie stanowią dowodów konieczności wcześniejszych założeń, a jedynie formułują warunki przy których zwartość nie zachodzi.

Rozprawa doktorska mgra Artura Słabuszewskiego jest jednolita tematycznie. Zasadniczym celem wszystkich trzech rozdziałów jest zbadanie ciągłości lub zwartości zanurzeń przestrzeni funkcyjnych typu Sobolewa-Biesowa określonych na przestrzeniach metrycznych. Badania w zakresie analizy na przestrzeniach metrycznych stanowią próbę budowania struktur gładkości za pomocą środków dostępnych w tych przestrzeniach. Naturalnym zadaniem jest tutaj odtworzenie związków i twierdzeń znanych z analizy na przestrzeniach euklidesowych. Rozprawa doktorska mgr Słabuszewskiego wpisuje się w ten nurt badań.

Uzyskane w rozprawie wyniki są moim zdaniem interesujące i nawiązują do aktualnie prowadzonych badań z zakresu analizy na przestrzeniach metrycznych. Za najciekawszy uważam rozdział trzeci dotyczący zwartości zanurzeń. W rozprawie wykorzystano przede wszystkim środki techniczne typowe dla teorii miary i geometrii przestrzeni metrycznych. Dowody twierdzeń są moim zdaniem poprawne. Ich przeprowadzenie wymagało zarówno wiedzy matematycznej jak i pomysłowości.

Rozprawa napisana jest po polsku i od strony językowej jest poprawna. Zauważyłem jedynie kilka drobnych nieistotnych usterek. Prezentowane wyniki opierają się na czterech pracach przygotowywanych do druku lub już opublikowanych. Współautorem wszystkich artykułów mgra Artura Słabuszewskiego jest promotor rozprawy dr hab. Przemysław Górka, a w dwóch współautorem jest także R.Alvarado (Amherst College, USA).

Zgodnie z informacjami zawartymi w bazie MathSciNet mgr Słabuszewski jest współautorem ogółem 3 opublikowanych prac badawczych, które ukazały się w latach 2019-23 w Nonlinear Anal., Studia Math. i w Proc. AMS.

Tematyka badań prezentowanych w rozprawie jest niewątpliwie aktualna, stosowane metody są technicznie zaawansowane i nowoczesne. Mgr Artur Słabuszewski wykazał się szeroką wiedzą z zakresu analizy matematyczną oraz umiejętnością dowodzenia nowych twierdzeń. Uważam, że praca spełnia wszystkie ustawowe wymagania dotyczące postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka. Wnioskuję o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.